Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

**С.Н. Белолипецкий**

# ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ДЕСЯТЫХ КЛАССОВ

*Рекомендовано Научно-методическим советом*
*МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебного пособия*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2013

УДК 53(075.8)
ББК 22.3
Б43

Рецензенты: *О.С. Еркович, О.В. Манько*

**Белолипецкий С. Н.**

Б43 Олимпиадные задачи по физике для учащихся десятых классов : учеб. пособие / С. Н. Белолипецкий. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – 46, [2] с ; ил.

ISBN 978-7038-3678-1

Приведены задачи по физике для учащихся десятых классов, которые предлагались на физико-математических олимпиадах МГТУ им. Н.Э. Баумана и олимпиадах «Шаг в будущее» в 2005–2012 гг.

Для учащихся десятых и одиннадцатых классов, а также для преподавателей физики.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3

*Учебное издание*

**Белолипецкий** Сергей Николаевич

**ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ДЕСЯТЫХ КЛАССОВ**

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *О.Е. Никитина*
Компьютерная верстка *А.Ю. Ураловой*

Подписано в печать 22.03.2013. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,79. Тираж 300 экз. Изд. № 102. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5., стр. 1.

ISBN 978-7038-3678-1 © МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ

На протяжении почти 20 лет МГТУ им. Н.Э. Баумана проводит различные олимпиады физико-математического и технического профиля. В этих олимпиадах участвует большое количество учащихся восьмых–одиннадцатых классов г. Москвы, Московской области и других регионов России.

В учебном пособии приведены задачи, которые предлагались учащимся десятых классов на физико-математических олимпиадах МГТУ им. Н.Э. Баумана и олимпиадах «Шаг в будущее» в 2005–2012 гг. Поскольку заключительный тур этих олимпиад обычно проводится в январе – феврале, то задачи охватывают разделы «Механика» и «Молекулярная физика и термодинамика».

Первый раздел учебного пособия включает в себя два полных варианта олимпиадных задач (2009–2011 гг.) и один из вариантов олимпиадных задач 2012 г. Для первых вариантов каждого года даны подробные решения задач, а для вторых вариантов – только ответы, чтобы школьник мог попробовать решить задачи самостоятельно.

Во втором разделе учебного пособия приведены задачи, предлагавшиеся на олимпиадах 2005–2008 гг. Для удобства задачи распределены по разделам физики, к ним даны ответы. Предлагаем учащимся самим испытать свои силы в решении этих задач. Задачи не выходят за пределы базисного учебного плана по физике. Если не удастся решить какую-то задачу самостоятельно, советуем внимательно прочитать указание к задаче. Указание поможет получить правильный ответ.

Решения и ответы с указаниями даны в третьем разделе учебного пособия.

Учебное пособие может быть использовано не только учащимися десятых классов, но и учащимися девятых и одиннадцатых классов. Надеемся, что оно окажется полезным для успешного участия в различных олимпиадах.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

## 1. ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ (2009–2012 гг.)

### 2009 год

### *Вариант 1*

**1. Траектория.** Камень бросили с поверхности земли под некоторым углом к горизонту. Пусть начало координат выбрано в точке броска, ось $x$ направлена горизонтально вдоль поверхности земли, а ось $y$ – вертикально. Уравнение траектории камня описывается функцией $y(x) = -kx^2 + x$, где $k = 0{,}2$ м$^{-1}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите время движения камня.

**2. Полет самолета.** Самолет летит по прямой горизонтально со скоростью $v_0 = 720$ км/ч. Чтобы сделать разворот в горизонтальной плоскости, ему необходимо увеличить скорость. Какой будет эта скорость $v_0$, и под каким углом $\alpha$ к вертикали самолет должен наклонить плоскость крыльев, чтобы разворот произошел по окружности радиусом $R = 8$ км. Подъемная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев и пропорциональна квадрату скорости самолета (коэффициент пропорциональности в обоих случаях считать одинаковым).

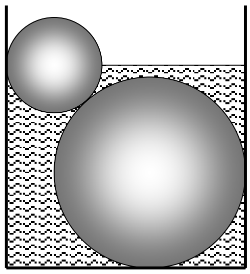

**Рис. 1**

**3. Давление шаров.** Два шара из одинакового материала радиусами $r$ и $2r$ поместили в цилиндрический сосуд диаметром $4{,}5r$, как показано на рис. 1. В сосуд наливают жидкость плотностью $\rho$. Когда жидкость доходит до середины верхнего шара, нижний шар перестает давить на дно. С какой силой в этот момент верхний шар давит на нижний? Чему равна плотность материала шаров?

*Примечание.* Объем шара радиусом $r$ вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

**4. Пятерка превращается …** На рис. 2 изображен график изменения объема $V$ идеального газа от его абсолютной температуры $T$ в процессе 1–2–3–4–5–6. Масса газа постоянна. Изобразите, соблюдая правильный масштаб, как будет выглядеть зависимость давления $p$ от абсолютной температуры $T$ для этого процесса.

**5. КПД.** Коэффициент полезного действия цикла 1–2–3–4–1, представленного на рис. 3, равен $\eta$. Определите КПД цикла 1–3–4–1.

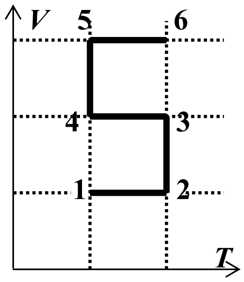


**Рис. 2**

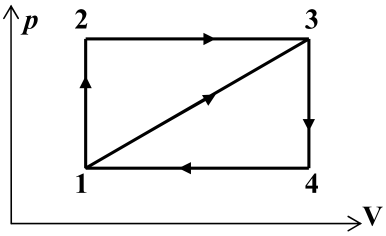


**Рис. 3**

### *Вариант 2*

**1. Траектория.** На рис. 4 изображена часть траектории движения камня, брошенного с поверхности Земли под некоторым углом к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, рассчитайте скорость камня в самой верхней точке траектории. Начало координат совпадает с точкой броска. Ось $x$ направлена вдоль поверхности Земли.

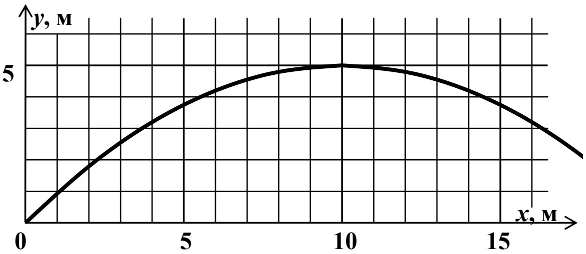


**Рис. 4**

**2. Полет самолета.** Самолет летит по прямой горизонтально со скоростью $v_0$ = 720 км/ч. Чтобы сделать разворот по дуге окружности, самолет увеличивает эту скорость в $\sqrt{2}$ раз. Считая, что разворот происходит в горизонтальной плоскости, определите радиус разворота $R$. Каков при этом угол наклона $\alpha$ к горизонту плоскости крыльев самолета? Подъемная сила направлена перпендикулярно плоскости крыльев и пропорциональна квадрату скорости самолета (коэффициент пропорциональности в обоих случаях считать одинаковым).

**3. Давление шаров.** Два шара из одинакового материала радиусами $r$ и $2r$ поместили в цилиндрический сосуд диаметром $4{,}5r$, как показано на рис. 5. В сосуд наливают жидкость плотностью $\rho$. Когда жидкость доходит до середины верхнего шара, нижний шар перестает давить на дно. С какой силой в этот момент верхний шар давит на нижний? Чему равна плотность материала шаров?

*Примечание.* Объем шара радиусом $r$ вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

**4. Двойка превращается …** На рис. 6 изображен график изменения объема $V$ идеального газа от его абсолютной температуры $T$ в процессе 1–2–3–4–5–6. Масса газа постоянна. Изобразите, соблюдая правильный масштаб, как будет выглядеть зависимость давления $p$ от абсолютной температуры $T$ для этого процесса.

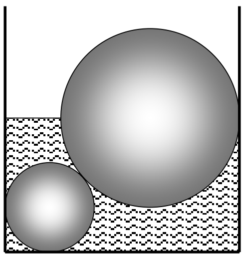

**Рис. 5**

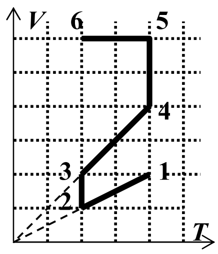


**Рис. 6**

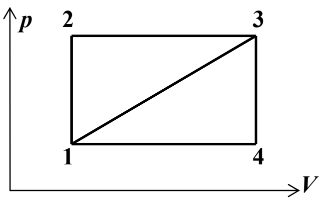


**Рис. 7**

**5. КПД.** Коэффициент полезного действия цикла 1–2–3–1, представленного на рис. 7, равен $\eta_1$. Определите КПД цикла 1–3–4–1.

## 2010 год

### *Вариант 1*

**1.** Мальчик бросил мяч в заднюю вертикальную стенку отъезжающего автобуса. Мяч подлетает к стенке под углом $\alpha < 45°$, а отлетает от нее под углом $2\alpha$ (рис. 8). Углы отсчитываются от нормали к стенке. Определите скорость мяча в момент удара, если скорость автобуса в этот момент равна $u$. Время удара считать очень малым, а сам удар абсолютно упругим.

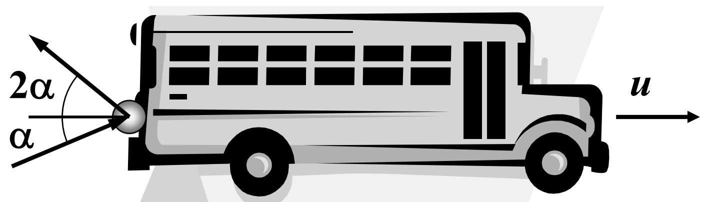


**Рис. 8**

**2.** Представьте себе, что на полюсе Земли пробурили шахту, направленную к центру Земли. Какую скорость разовьет маленький камушек, упавший в эту шахту, пролетев расстояние, равное одной четвертой радиуса Земли. Для сравнения, первая космическая скорость $v_{\text{I}}$ = 8 км/с. Силами сопротивления пренебречь.

**3.** $N$ комочков пластилина достали из холодильника, поэтому все комочки имеют температуру 0 °С. Массы комочков соответственно равны $m$, $2m$, $3m$…, $Nm$. Их положили на лед в ряд один за другим в произвольном порядке, причем первым оказался самый легкий комочек пластилина. Этот комочек толкнули вдоль линии, на которой лежат остальные комочки, сообщив ему кинетическую энергию $W$. При каждом столкновении комочки слипаются, так что после всех столкновений образуется одно большое тело. Какую максимальную температуру может иметь это тело, если удельная теплоемкость пластилина равна $c$?

**4.** Воздушный шар, масса оболочки которого $m$, имеет внизу отверстие, через которое воздух в шаре нагревается горелкой до температуры $t$ = 77 °С. Если к оболочке прикрепить груз массой $4m$, то шар сможет подняться в воздух и плавать вблизи поверхности Земли. На какую максимальную высоту способен подняться этот воздушный шар, если с него сбросить половину массы груза? Температура окружающего воздуха на этой высоте равна $t_1 = -23$ °C, а вблизи поверхности Земли $t_0 = 27$ °C. Как известно, атмосферное давление уменьшается в 2 раза через каждые пять километров высоты. Оболочку шара считать нерастяжимой.

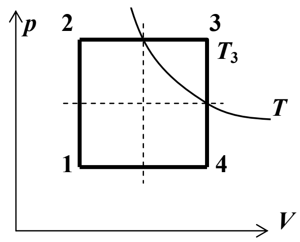


Рис. 9

**5.** С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершают циклический процесс, состоящий из двух изобар и двух изохор (рис. 9). Середина изобары 2–3 и середина изохоры 3–4 лежат на одной изотерме, соответствующей температуре $T$. а) Докажите, что точки 2 и 4 цикла также лежат на одной изотерме. б) Считая известными температуру $T$ и температуру $T_3$ газа в состоянии 3, найдите КПД этого цикла.

### *Вариант 2*

**1.** Мальчик бросил мяч в заднюю вертикальную стенку отъезжающего автобуса. В момент удара угол, под которым мяч подлетает к стенке, составляет $\alpha = 15°$ с нормалью к стенке, а угол $\beta$, под которым он отлетает от стенки, равен 45° с нормалью (рис. 10). Определите скорость автобуса, если скорость мяча в момент удара равна $v$. Считать время удара очень малым, а сам удар абсолютно упругим.

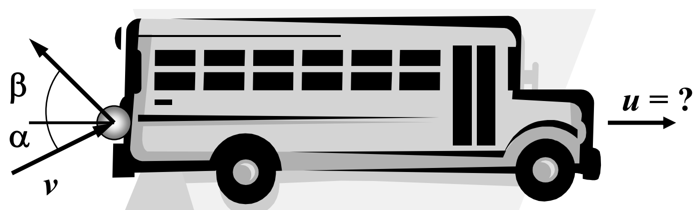


**Рис. 10**

**2.** Представьте себе, что на полюсе Земли пробурили шахту, направленную к центру Земли. Какую скорость разовьет маленький камушек, упавший в эту шахту, пролетев расстояние, равное половине радиуса Земли. Для сравнения, первая космическая скорость $v_{\rm I}$ = 8 км/с. Силами сопротивления пренебречь.

**3.** $N$ комочков пластилина достали из холодильника, поэтому все комочки имеют температуру 0 °С. Массы комочков соответственно равны $m$, $2m$, $3m$,…, $Nm$. Их положили на лед в ряд один за другим в произвольном порядке, причем первым оказался самый тяжелый комочек пластилина. Этот комочек толкнули вдоль линии, на которой лежат остальные комочки, сообщив ему кинетическую энергию $W$. При каждом столкновении комочки слипаются, так что после всех столкновений образуется одно большое тело. Какую максимальную температуру может иметь это тело, если удельная теплоемкость пластилина равна $c$?

**4.** Нерастяжимая оболочка шара-зонда объемом $V$ = 75 м$^3$ имеет в нижней части небольшое отверстие. Масса оболочки $m$ = 7 кг. Шар наполнен водородом. На какую максимальную высоту сможет подняться шар-зонд, если известно, что атмосферное давление уменьшается в 2 раза через каждые пять километров высоты? Температура воздуха в стратосфере $t$ = –53 °С, температура водорода равна температуре окружающего воздуха.

**5.** С некоторым количеством идеального одноатомного газа совершают циклический процесс, состоящий из двух изобар и двух изохор (рис. 11). Середина изохоры 1–2 и середина изобары 4–1 лежат на одной изотерме, соответствующей температуре $T$. а) Докажите, что точки 1 и 3 цикла лежат на прямой, проходящей через начало координат. б) Считая известными температуру $T$ и температуру $T_1$ газа в состоянии 1, найдите КПД этого цикла.

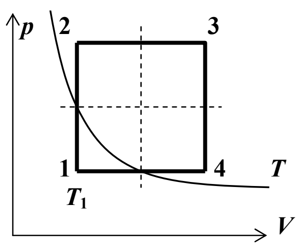

**Рис. 11**

## 2011 год

### *Вариант 1*

**1. Опыты с камушками.** Мальчик стоит на краю высокой горки и бросает вертикально вверх камушки. а) Может ли мальчик бросить камушек с такой скоростью, чтобы он за первую секунду своего движения пролетел путь, равный $S$ = 2 м? б) Какой наименьший путь может пролететь камушек за первую секунду своего движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

**2. Блоки и грузы.** Механическая конструкция, состоящая из трех блоков и четырех грузов, подвешена к неподвижному потолку. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует. На рис. 12 показаны направления ускорений трех грузов в системе отсчета, связанной с потолком. Модули этих ускорений соответственно равны

$$a_1 = \frac{1}{10}g; \quad a_2 = \frac{1}{5}g; \quad a_3 = \frac{3}{10}g,$$

где $g$ – ускорение свободного падения. а) Определите величину и направление ускорения четвертого груза. б) Какими могут быть массы грузов, чтобы они двигались с указанными выше ускорениями? Приведите хотя бы один пример.

**3. В мертвой петле.** Шарик скользит без трения по наклонному желобу, а затем движется по мертвой петле радиусом $R$ (рис. 13). Высота, с которой отпускают шарик, равна $2R$. а) Опишите, как будет двигаться шарик. б) Рассчитайте, на какой максимальной высоте может оказаться шарик?

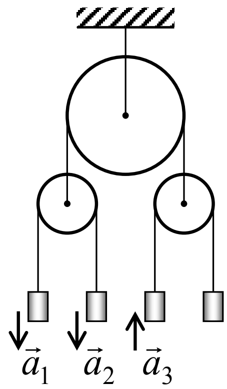


**Рис. 12**

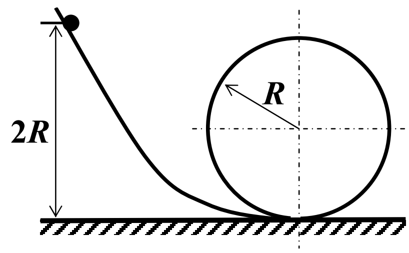


**Рис. 13**

**4. Пробка.** Круглое отверстие в дне сосуда закрыто пробкой, имеющей форму трех соединенных между собой цилиндров с общей осью симметрии (рис. 14). Диаметр отверстия равен диаметру нижнего цилиндра $0{,}8a$. Значения диаметров и высот всех цилиндров, из которых состоит пробка, показаны на рис. 14. Сосуд осторожно заполняют жидкостью плотностью $\rho$. При какой наибольшей плотности материала пробки $\rho_п$ можно добиться ее всплытия? Поверхностным натяжением пренебречь.

**5. Цикл.** Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает циклический процесс 1–2–3–1. На рис. 15 показано, как изменяется в цикле внутренняя энергия $U$ газа в зависимости от его давления $p$. Процессу 1–2 на рисунке соответствует дуга параболы $U \sim P^2$, а процессам 2–3 и 3–1 – отрезки прямых. а) Постройте график этого цикла в координатах $pV$. б) Рассчитайте КПД цикла.

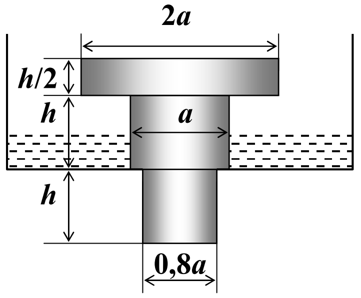


**Рис. 14**

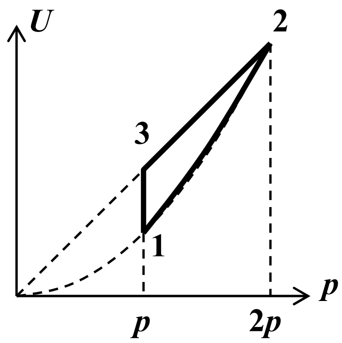


**Рис. 15**

### *Вариант 2*

**1. Опыты с камушками.** Мальчик стоит на краю высокой горки и бросает вертикально вверх камушки. а) Может ли мальчик бросить камушек с такой скоростью, чтобы камушек за первые две секунды своего движения пролетел путь, равный $S = 9$ м? б) Какой наименьший путь может пролететь камушек за первые две секунды своего движения? Сопротивление воздуха не учитывать.

**2. Блоки и грузы.** Механическая конструкция, состоящая из трех блоков и четырех грузов, подвешена к неподвижному потолку. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует. На рис. 16 показаны направления ускорений трех грузов в системе отсчета, связанной с потолком. Модули этих ускорений соответственно равны

$$a_1 = \frac{1}{2}g\,;\;\; a_2 = \frac{1}{5}g\,;\;\; a_3 = \frac{3}{10}g\,,$$

где $g$ – ускорение свободного падения. а) Определите величину и направление ускорения четвертого груза. б) Какими могут быть массы грузов, чтобы они двигались с указанными выше ускорениями? Приведите хотя бы один пример.

**3. Вокруг гвоздя.** Небольшой груз подвешен на нити длиной $L$ к горизонтальной планке. Груз с нитью отвели на 90° и отпустили (рис. 17). Когда нить проходила вертикальное положение, она наткнулась на гвоздь, вбитый ниже планки на расстоянии $L/2$ от точки подвеса. Трения между нитью и гвоздем нет. а) Опишите, как будет двигаться груз. б) Рассчитайте, на каком минимальном расстоянии от планки он может оказаться?

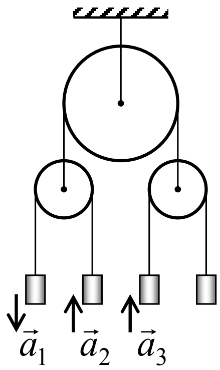


**Рис. 16**

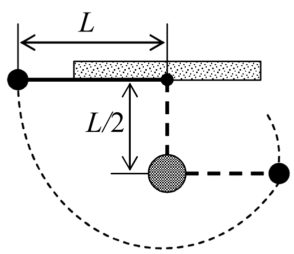


**Рис. 17**

**4. Пробка.** Квадратное отверстие в дне сосуда закрыто пробкой, имеющей форму трех соединенных между собой правильных призм с квадратными основаниями и общей осью симметрии (рис. 18). Размеры отверстия совпадают с размерами нижнего основания пробки. Значения сторон квадратов, лежащих в основаниях призм, и высот призм, из которых состоит пробка, показаны на рисунке. Сосуд осторожно заполняют жидкостью плотностью ρ. При какой наибольшей плотности материала пробки $\rho_п$ можно добиться ее всплытия? Поверхностным натяжением пренебречь.

**5. Цикл.** Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает циклический процесс 1–2–3–1. На рис. 19 показано, как меняется в цикле внутренняя энергия $U$ газа в зависимости от его объема $V$. Процессу 2–3 на рисунке соответствует дуга параболы $U \sim V^2$, а процессам 1–2 и 3–1 – отрезки прямых. а) Постройте график этого цикла в координатах $pV$. б) Рассчитайте КПД цикла.

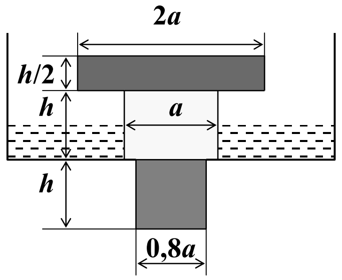


**Рис. 18**

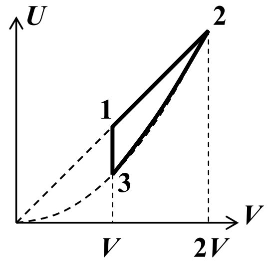


**Рис. 19**

**2012 год**

**1. Ускорение муравья.** Муравей движется вдоль координатной оси $x$. На рис. 20 показано, как скорость муравья $v$ зависит от координаты $x$. Чему равны ускорения муравья в точках с координатами 5 и 8 мм?

**2. Спуск по параболе.** Снежная горка имеет форму параболы $y = kx^2$, где $k$ – известный коэффициент (рис. 21). Мальчик Ваня

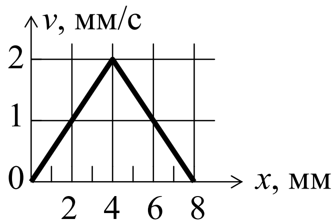


**Рис. 20**

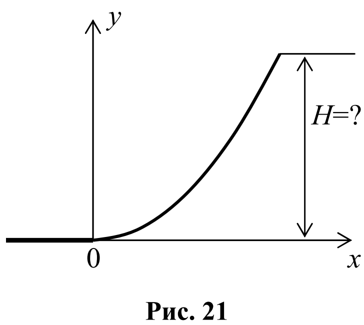


**Рис. 21**

решил скатиться на санках с этой горки. Коэффициент трения между полозьями санок и снегом равен μ. Определите, с какой высоты $H$ Ваня спустился с горки, если известно, что санки остановились прямо у основания горки (в точке с координатой $x = 0$). Начальная скорость санок равна нулю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

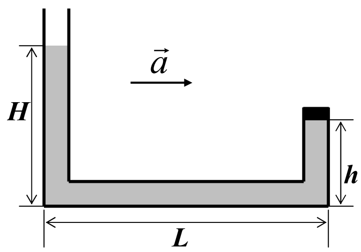


**Рис. 22**

**3. Движущаяся трубка.** Изогнутая тонкая трубка, заполненная ртутью, движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением (рис. 22). Левая часть трубки открыта, уровень ртути в ней поднимается до высоты $H = 24$ см. Правая часть трубки высотой $h =$ $= 10$ см герметично закрыта пробкой и полностью заполнена ртутью. Длина горизонтальной части трубки $L = 90$ см. Атмосферное давление $H_0 = 760$ мм рт. ст. С каким ускорением движется трубка, если ртуть в правой части трубки не оказывает давления на пробку? Поверхностными явлениями пренебречь.

*Замечание.* Хотя плотность ртути не является секретом, при расчетах попробуйте обойтись без нее.

**4. Неизвестный процесс.** С идеальным одноатомным газом совершают два последовательных процесса. Первый процесс 1–2 – изобарное расширение, при котором к газу подводится количество теплоты, равное 100 Дж. Про второй процесс 2–3 известно, что давление газа в этом процессе уменьшается и газ отдает в окружающую среду количество теплоты, равное 60 Дж. Состояния 3 и 1 идеального газа лежат на одной изотерме. Определите по этим данным, каким может быть процесс 2–3, и постройте график зависимости давления $p$ идеального газа от изменения его объема $V$ для всего процесса 1–2–3. Вычислите работу, совершенную газом в процессе 1–2–3.

**5. После затухания колебаний.** Теплоизолированный сосуд длиной $L$ заполнен идеальным одноатомным газом. Газ разделен вертикальным теплопроводящим поршнем, который удерживается посередине сосуда. В начальный момент газ в левой половине сосуда имеет давление $2p$ и температуру $T$, а в правой – давление $p$

и температуру $2T$ (рис. 23). Поршень отпускают, и он начинает колебаться. На сколько сместится поршень после затухания колебаний, и какая будет конечная температура в сосуде? Толщиной и теплоемкостью поршня пренебречь.

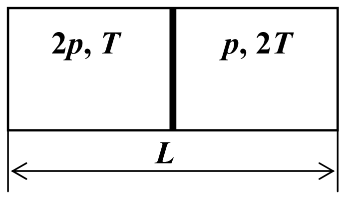


**Рис. 23**

## 2. ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ (2005–2008 гг.)

### Кинематика

**1.** Муравей бежит от муравейника по прямой так, что скорость муравья обратно пропорциональна расстоянию от него до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке $A$ на расстоянии $L_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1 =$ $= 2$ см/с. За какое время $t$ муравей добежит от точки $A$ до точки $B$, которая находится на расстоянии $L_2 = 2$ м от центра муравейника?

**2.** Маленький шарик падает с некоторой высоты $h$ без начальной скорости на горизонтальную плоскость и отскакивает от нее. При каждом ударе о плоскость шарик теряет 10 % своей энергии. К моменту девятого удара шарик прошел путь, равный $S = 1203$ м. С какой высоты $h$ упал шарик? Может ли путь, пройденный шариком от начала движения, к некоторому моменту времени (не обязательно соответствующему моменту удара) достигнуть значения $s = 2006$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**3.** Колесо радиусом $R = 1$ м катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью $v = 1$ м/с. Некоторая точка $M$ обода колеса в системе отсчета, связанной с неподвижной поверхностью, описывает кривую, которая называется циклоидой (рис. 24). По этой циклоиде с постоянной скоростью $v = 1$ м/с летит комар. Чему равно ускорение комара в точках $M_1$ и $M_2$ траектории, соответствующих положению точки $M$ спустя четверть и половину периода оборота колеса?

**4.** Камень, брошенный с земли под углом 60° к горизонту со скоростью $v_0$, летит по параболе. По той же траектории с постоянной скоростью $v_0$ летит птица. Определите ускорение птицы в начальной и верхней точках траектории.

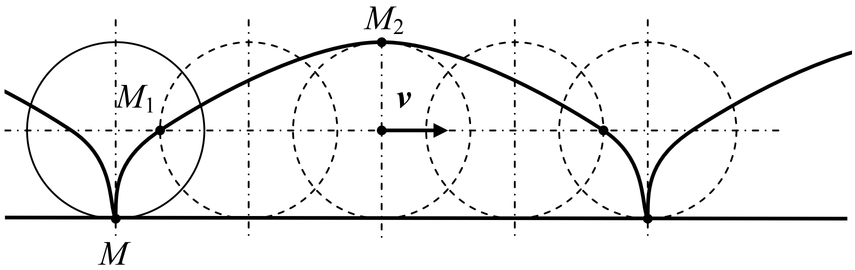


**Рис. 24**

**5.** Тонкую пластинку, имеющую форму равностороннего треугольника $ABC$, раскрутили и бросили на гладкую горизонтальную плоскость так, что пластинка в момент падения на плоскость была горизонтальной. В некоторый момент времени скорость точки $A$ пластинки оказалась направленной вдоль стороны $AB$, а скорость точки $B$ оказалась параллельной стороне $AC$ (рис. 25). Как направлена в этот момент скорость точки $C$? Чему при этом равны модули скоростей точек $B$ и $C$, если скорость точки $A$ равна $v$?

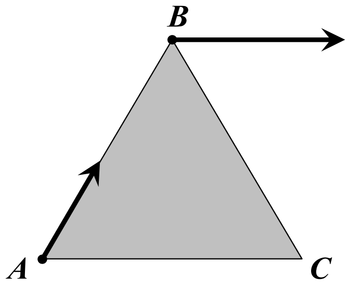


**Рис. 25**

## Динамика

**6.** Из точки $A$ по спицам, расположенным в вертикальной плоскости, одновременно начинают скользить без трения маленькие бусинки (рис. 26). Докажите, что в любой момент времени $t$ все бусинки будут находиться на одной окружности. Чему равен диаметр $D$ этой окружности?

**7.** Механическая конструкция, состоящая из трех блоков и четырех грузов, подвешена к динамометру, как показано на рис. 27. Массы грузов равны $m$. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует. На сколько изменятся показания динамометра, если на один из грузов положить дополнительный груз такой же массы?

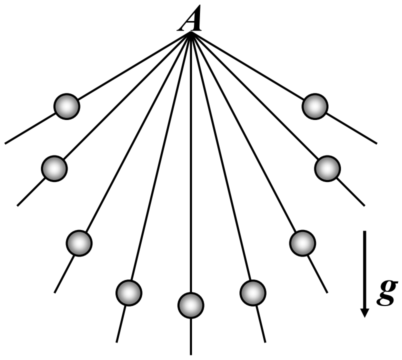


**Рис. 26**

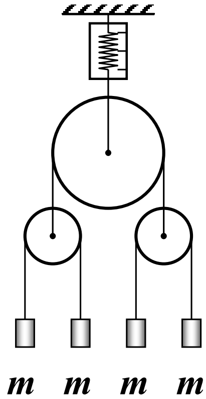


**Рис. 27**

**8.** Две одинаковые бусинки могут двигаться без трения по гладкому горизонтальному стержню. Они связаны друг с другом куском легкой и нерастяжимой нити, к середине которой привязана третья такая же бусинка. Первоначально бусинки на стержне удерживают, куски нити при этом составляют друг с другом угол 60° (рис. 28). Бусинки одновременно отпускают. Найдите ускорения бусинок сразу после этого.

**9.** На гладкой горизонтальной поверхности собрана конструкция из четырех одинаковых кубиков массой $m$, как показано на рис. 29. Между двумя верхними кубиками натянута невесомая нерастяжимая нить. Коэффициент трения между кубиками равен $\mu$. С какой наименьшей силой $F$, направленной горизонтально, нужно тянуть верхний кубик, чтобы разрушить эту конструкцию?

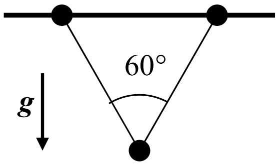


**Рис. 28**

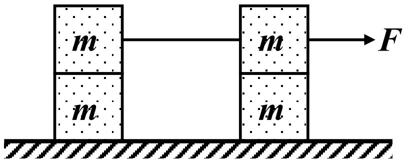


**Рис. 29**

**10.** На гладкой горизонтальной поверхности собрана конструкция из четырех одинаковых кубиков массой $m$, как показано на рис. 30. Между двумя верхними кубиками натянута невесомая нерастяжимая нить. Коэффициент трения между кубиками равен μ. С какой наименьшей силой $F$, направленной горизонтально, нужно тянуть нижний кубик, чтобы разрушить эту конструкцию?

**11.** Гантель, состоящая из жесткого невесомого стержня с маленькими шариками массами $3m$ и $m$ на концах, находится внутри гладкой полусферической чаши, как показано на рис. 31. Длина стержня равна радиусу чаши. Будучи отпущенной, гантель движется в вертикальной плоскости так, что шарики все время касаются поверхности чаши. С какой силой $F$ шарики действуют на стержень в момент, когда он горизонтален?

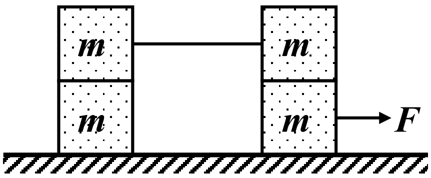


**Рис. 30**

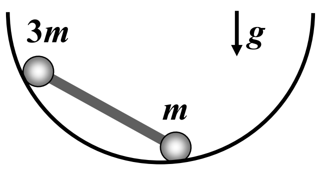


**Рис. 31**

**12.** Гантель, состоящую из жесткого невесомого стержня с маленькими шариками массами $2m$ и $m$ на концах, удерживают горизонтально внутри гладкой полусферической чаши, как показано на рис. 32. Длина стержня равна радиусу чаши. Определите силы давления шариков на поверхность чаши сразу же после того, как гантель отпустили.

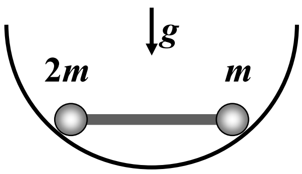


**Рис. 32**

**13.** Оцените, как изменилась бы продолжительность земного года, если бы масса Земли сравнялась с массой Солнца, а расстояние между ними осталось бы прежним?

**14.** Сила, с которой Солнце притягивает Луну, примерно в два раза больше, чем сила, с которой Земля притягивает Луну. Почему же тогда Луна – спутник Земли, а не самостоятельная планета?

## Импульс. Энергия

**15.** Две одинаковые легкие тележки, на которых сидят два одинаковых дворника, катятся по инерции параллельно друг другу с одинаковыми скоростями по очень скользкому льду. Начинает падать снег. Дворник, сидящий на одной из тележек, сбрасывает падающий на нее снег равномерно в разные стороны, а дворник, находящийся на другой тележке, спит. Какая из тележек быстрее пройдет одно и то же расстояние? Тележки не могут двигаться в направлении, перпендикулярном колесам.

**16.** Тележка массой $M$ движется по неподвижному горизонтальному конвейеру. В момент, когда тележка въезжает на конвейер и ее скорость равна $v_0$, на нее сверху опускается заготовка массой $m$. Через одну секунду в тележке под заготовкой открывается люк, и заготовка падает на конвейер. Еще через секунду на тележку снова опускается такая же заготовка, затем через секунду под заготовкой опять открывается люк, и т. д. Какую скорость будет иметь тележка через $2n$ секунд после начала движения в момент, когда на тележку опустилась очередная заготовка? Силой трения между тележкой и конвейером пренебречь.

**17.** На вершине гладкого полусферического купола радиусом $R$ находится небольшой шарик. На него налетает такой же по размерам шарик. В результате упругого лобового удара шарики начинают двигаться по поверхности купола. Один из шариков отрывается от поверхности полусферы на высоте $h = \frac{2}{3}R$ от основания купола, а другой – на высоте $H > \frac{2}{3}R$. Определите отношение масс шариков и скорость налетающего шарика $v$ сразу перед ударом.

**18.** На вершине гладкого полусферического купола радиусом $R$ находится небольшой шарик массой $m$. На него налетает такой же по размерам шарик массой $2m$. Происходит упругий лобовой удар. Скорость налетающего шарика минимально возможная, чтобы шарик массой $m$ сразу же после удара оторвался от купола. На какой высоте $H$ от основания купола оторвется шарик массой $2m$?

**19.** По гладкому горизонтальному проволочному кольцу могут скользить без трения две маленькие бусинки массами $m$ и $2m$. Вначале бусинки находились в точке $A$ кольца, как показано на рис. 33. Бусинкам сообщают начальные скорости: бусинке массой $m$ – скорость $2v$, а бусинке массой $2m$ – скорость $v$, направленные в противоположные стороны. В процессе своего движения бусинки многократно сталкиваются друг с другом. Считая столкновения бусинок абсолютно упругими, определите угол $AOC$, если $C$ – точка, в которой оказываются бусинки в момент их 101-го столкновения.

**20.** Гантель, представляющая собой два одинаковых шарика массами $m$, соединенных невесомым стержнем, стоит в углу, образованном гладкими плоскостями (рис. 34). Гантель начинает движение из вертикального положения без начальной скорости. Определите силы давления нижнего шарика гантели на вертикальную и горизонтальную плоскости в момент, когда ось гантели составляет угол $\alpha$ с горизонтом. Расстояние между шариками много больше их радиусов.

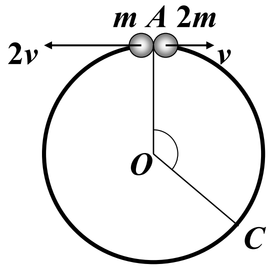


**Рис. 33**

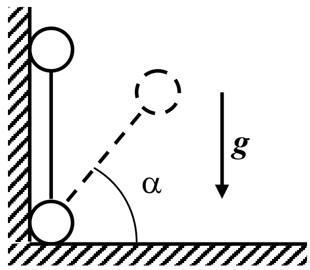


**Рис. 34**

## Статика. Гидростатика

**21.** Однородный тонкий канат свободно висит так, что его концы закреплены в точках $A$ и $B$ (рис. 35). При этом самая нижняя точка каната (точка $C$) делит канат в отношении 2:1. Силы натяжения каната в точках закрепления соответственно равны $T_A$ = 14 Н и $T_B$ = 11 Н. Определите массу каната.

**22.** Однородная тонкая веревка свободно висит так, что ее концы закреплены в точках $A$ и $B$ (рис. 36). При этом самая нижняя точка веревки (точка $C$) делит веревку в отношении 1:3. Силы натяжения веревки в точках закрепления соответственно равны $T_A$ = 3 Н и $T_B$ = 7 Н. Определите силу натяжения веревки в точке $C$.

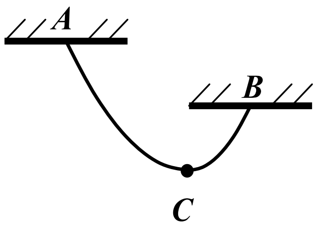


**Рис. 35**

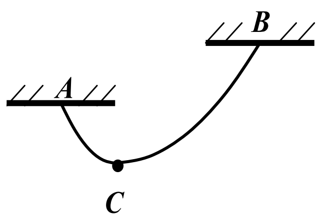


**Рис. 36**

**23.** Колокол, представляющий собой полусферу радиусом $R$, имеет массу $m$. В колокол впаяна тонкая легкая трубка радиусом $r$ ($r \ll R$), и он стоит на гладком горизонтальном столе (рис. 37). До какого максимального уровня $h$ можно налить воду в трубку, чтобы она не вытекала из-под колокола?

*Примечание.* Объем шара радиусом $R$ вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

**24.** Тонкая воронка, представляющая собой конус радиусом $R$ и высотой $H$, имеет массу $m$. В верхнюю часть конуса впаяна тонкая легкая трубка радиусом $r$ ($r \ll R$). Воронка стоит на гладком горизонтальном столе (рис. 38). До какого максимального уровня $h$ можно налить воду в трубку, чтобы она не вытекала из-под воронки?

*Примечание.* Объем конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

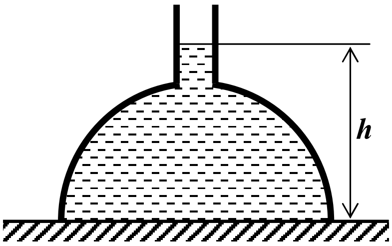


**Рис. 37**

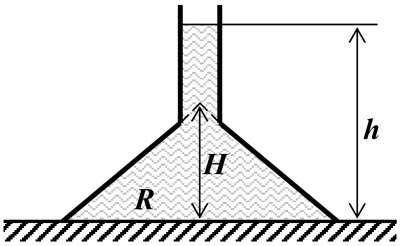


**Рис. 38**

**25.** На дне бассейна лежит тонкий стержень длиной $L$, состоящий из двух частей, сделанных из различных материалов. Длины каждой части стержня и площади их поперечных сечений одинаковы, а плотности равны $\frac{\rho}{3}$ и $3\rho$. В бассейн медленно наливают жидкость плотностью $\rho$, в результате чего стержень поднимается. Какой угол будет составлять стержень с дном бассейна, если высота жидкости, налитой в бассейн, станет равной $h = \frac{L}{2}$?

## Молекулярная физика и термодинамика

**26.** Предположим, что планету массой $M$ и радиусом $r$ окружает атмосфера постоянной плотности, состоящая из газа с молярной массой $\mu$. Определите температуру $T$ атмосферы на поверхности планеты, если толщина атмосферы равна $h$ ($h \ll r$).

**27.** Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа $CO_2$, температура которого вблизи поверхности планеты $T = 800$ К, а плотность $\rho = 6{,}6$ г/л. Оцените запасы углекислого газа на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты $R_В = 6300$ км. Ускорение свободного падения на Венере $g_В = 8{,}2$ м/с$^2$.

**28.** На гладком горизонтальном столе находится цилиндрический сосуд длиной $L$, разделенный перегородкой на две равные части (рис. 39). В одной части сосуда находится кислород $O_2$, а в другой части сосуда – азот $N_2$. Давление кислорода вдвое больше давления азота, а температуры одинаковы. В перегородке открывается шторка, в результате чего газы в сосуде перемешиваются. На какое расстояние при этом сдвинется сосуд? Массами сосуда и перегородки пренебречь. Процесс считать изотермическим.

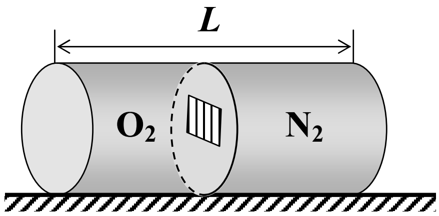


**Рис. 39**

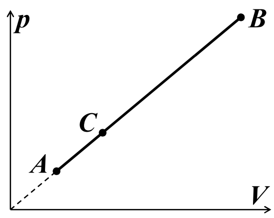


**Рис. 40**

**29.** С идеальным газом совершают процесс $A–C–B$, изображенный на рис. 40. Температура газа в состоянии $A$ равна $T_1$, а в состоянии $B$ – $T_2$. Определите температуру газа в состоянии $C$, если известно, что точка $C$ делит отрезок $AB$ в отношении $AC:CB=1:n$.

## РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

### 1. Олимпиадные задачи (2009–2012 гг.)

### 2009 год

#### *Вариант 1*

**1.** Уравнение траектории камня, брошенного под углом $\alpha$ к горизонту с начальной скоростью $v_0$, имеет вид

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Согласно условию $y(x) = -kx^2 + x$. Сравнивая коэффициенты в записанных выше функциях $y(x)$ при $x^2$ и $x$, получаем

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ;$$

$$v_0 = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2k}} = 7 \text{ м/с}.$$

Тогда время движения камня

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 1 \text{ с}.$$

**2.** Движение самолета по прямой с постоянной скоростью $v_0$ описывается уравнением $mg = kv_0^2$, а движение самолета по окружности – уравнениями (рис. 41):

$$x: F\cos\alpha = \frac{mV^2}{R};$$

$$y: F\sin\alpha = mg.$$

Здесь $F = kv^2$.

Решая все полученные выше уравнения, находим

$$\cos\alpha = \frac{V_0^2}{gR} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ;$$

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\sin\alpha}} = 215 \text{ м/с}.$$

**3.** На шары действуют силы Архимеда $F_{A1}$ и $F_{A2}$, силы нормальной реакции между шарами и поверхностью сосуда $N_1$ и $N_2$, а также силы взаимодействия между шарами $N$ (рис. 42). Запишем систему уравнений динамики:

$$\begin{cases} F_{A1} - N\cos\alpha - m_1 g = 0; \\ F_{A2} + N\cos\alpha - m_2 g = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho\frac{4}{3}\pi(2r)^3 g - N\cos\alpha - \rho_{ш}\frac{4}{3}\pi(2r)^3 g = 0; \\ \rho\frac{2}{3}\pi r^3 g + N\cos\alpha - \rho_{ш}\frac{4}{3}\pi r^3 g = 0. \end{cases}$$

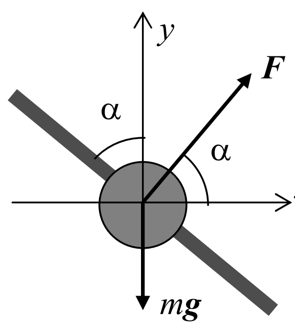


**Рис. 41**

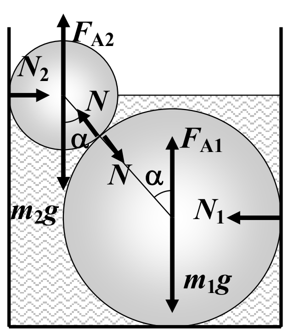


**Рис. 42**

Решив полученную систему уравнений, найдем плотность шаров:

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{17}{18}\rho.$$

Поскольку диаметр цилиндра

$$D = r + r\sin\alpha + 2r + 2r\sin\alpha = 3r(1+\sin\alpha) = 4{,}5r,$$

то

$$\sin\alpha = 0{,}5\,, \Rightarrow \ \alpha = 30^\circ.$$

Подставив это значение угла в любое уравнение полученной выше системы, вычислим силу давления верхнего шара на нижний шар:

$$N = \frac{32}{27\sqrt{3}}\pi\rho g r^3\,.$$

**4.** Для того чтобы построить зависимость давления $p$ от абсолютной температуры $T$, рассчитаем параметры состояния газа. Результаты расчета представим в виде таблицы.

| Состояние газа | Параметры состояния газа | Вычисления |
|---|---|---|
| 1 | $p_0, V_0, T_0$ | – |
| 2 | $p_2, V_0, 2T_0$ | $\frac{p_2}{2T_0} = \frac{p_0}{T_0} \ \Rightarrow \ p_2 = 2p_0$ |
| 3 | $p_3, 2V_0, 2T_0$ | $p_3 \cdot 2V_0 = p_2 \cdot V_0 \ \Rightarrow \ p_3 = p_0$ |
| 4 | $p_4, 2V_0, T_0$ | $\frac{p_4}{T_0} = \frac{p_3}{2T_0} \ \Rightarrow \ p_4 = \frac{p_0}{2}$ |
| 5 | $p_5, 3V_0, T_0$ | $p_4 \cdot 2V_0 = p_5 \cdot 3V_0 \Rightarrow p_5 = \frac{p_0}{3}$ |
| 6 | $p_6, 3V_0, 2T_0$ | $\frac{p_6}{2T_0} = \frac{p_5}{T_0} \ \Rightarrow \ p_6 = \frac{2}{3}p_0$ |

С учетом приведенных в таблице вычислений построим график заданного процесса в координатах $pT$ (рис. 43).

**5.** Обозначим работу за цикл 1–2–3–4–1 $A_0$ (рис. 44). В цикле 1–2–3–4–1 полученное количество теплоты

$$Q_{\text{пол}} = Q_{12} + Q_{23},$$

а отданное количество теплоты

$$Q_{\text{отд}} = |Q_{34}| + |Q_{41}|.$$

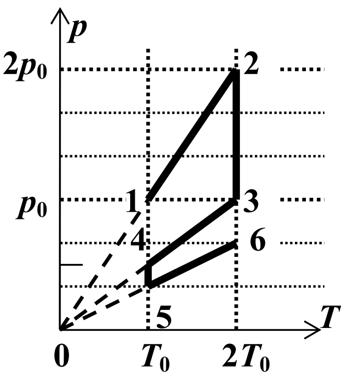


Рис. 43

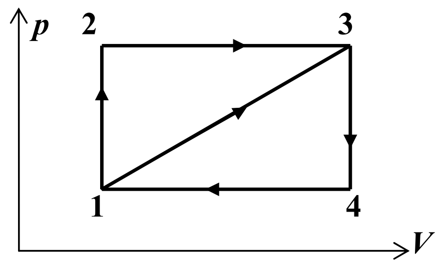


Рис. 44

Тогда

$$A_0 = Q_{\text{пол}} - Q_{\text{отд}}.$$

КПД цикла 1–2–3–4–1

$$\eta = \frac{A_0}{Q_{\text{пол}}} = \frac{A_0}{A_0 + Q_{\text{отд}}} \Rightarrow \frac{Q_{\text{отд}}}{A_0} = \frac{1}{\eta} - 1.$$

В цикле 1–3–4–1 работа за цикл равна $A_0/2$.
Полученное количество теплоты

$$Q'_{\text{пол}} = Q_{13},$$

а отданное количество теплоты

$$Q'_{\text{отд}} = |Q_{34}| + |Q_{41}| = Q_{\text{отд}}.$$

Тогда

$$\frac{A_0}{2} = Q'_{\text{пол}} - Q'_{\text{отд}} = Q'_{\text{пол}} - Q_{\text{отд}}.$$

КПД цикла 1–3–4–1 выражается через КПД цикла 1–2–3–4–1:

$$\eta' = \frac{A_0/2}{A_0/2 + Q_{\text{отд}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2Q_{\text{отд}}}{A_0}} = \frac{1}{1 + 2\left(\dfrac{1}{\eta} - 1\right)} = \frac{\eta}{2-\eta}.$$

### *Вариант 2*

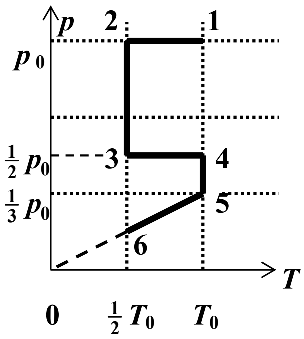


**Рис. 45**

**1.** $v = 9{,}9$ м/с.

**2.** $\alpha = 60^\circ$, $R = \dfrac{v_0^2}{g\sin\alpha} =$ 4,7 км.

**3.** $N = \dfrac{32}{27\sqrt{3}}\pi\rho g r^3$, $\rho_{\text{ш}} = \dfrac{5}{9}\rho$.

**4.** График цикла в координатах $pT$ приведен на рис. 45.

**5.** $\eta_2 = \dfrac{\eta_1}{1-\eta_1}$.

## 2010 год

### *Вариант 1*

**1.** Для решения задачи рассмотрим движение мяча в двух системах отсчета: в неподвижной системе отсчета *xy*, связанной с землей, и в движущейся системе отсчета, связанной с автобусом.

В неподвижной системе отсчета *xy* (рис. 46, *а*) скорость мяча в момент удара обозначим $\vec{v}$, скорость мяча после удара – $\vec{v}'$, скорость автобуса – $\vec{u}$.

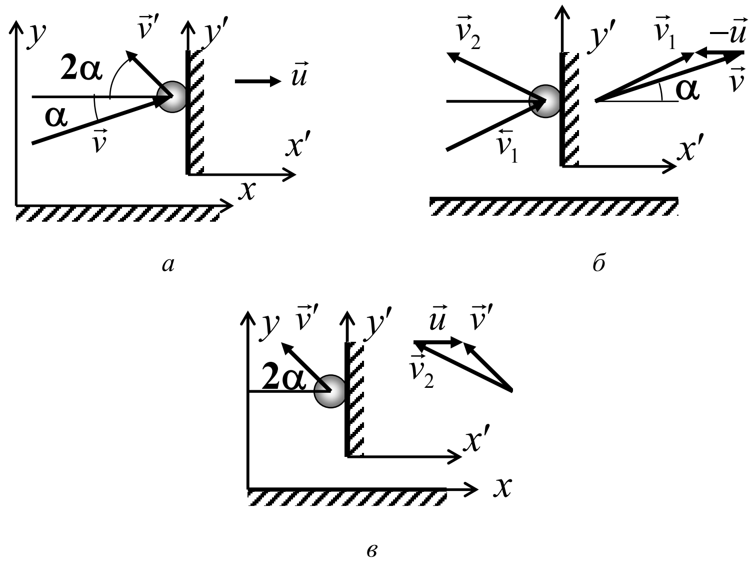


**Рис. 46**

В движущейся системе отсчета (см. рис. 46, *б*) относительная скорость мяча $\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{u}$. Тогда

$$x' : v_{1x} = v\cos\alpha - u;$$
$$y' : v_{1y} = v\sin\alpha.$$

После упругого отражения от стенки скорость мяча $\vec{v}_2$ сохраняет свой модуль, а угол падения равен углу отражения:

$$x' : v_{2x} = -v_{1x} = -v\cos\alpha + u;$$
$$y' : v_{2y} = v_{1y} = v\sin\alpha.$$

Перейдем снова в неподвижную систему отсчета (рис. 46, *в*). Скорость мяча после удара о стенку $\vec{v}' = \vec{v}_2 + \vec{u}$. Тогда

$$x : v'_x = v_{2x} + u = -v\cos\alpha + 2u;$$
$$y : v'_y = v_{2y} = v\sin\alpha.$$

Поскольку по условию мяч отлетает влево под углом 2α, то $v'_x < 0$ и

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{|v'_y|}{|v'_x|} = \frac{v\sin\alpha}{|-v\cos\alpha + 2u|} = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha - 2u} \Rightarrow v = 4u\cos\alpha\ .$$

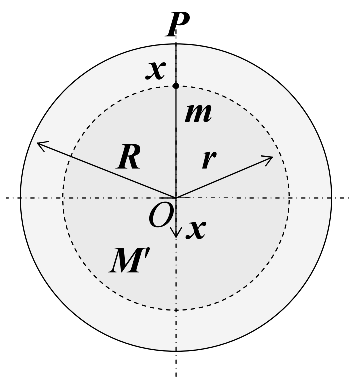

**Рис. 47**

**2.** Сила гравитационного взаимодействия однородного шара радиусом $R$ с материальной точкой массой $m$, находящейся внутри шара на расстоянии $r < R$ от центра шара, равна силе, с которой взаимодействует материальная точка с однородным шаром радиусом $r$ и массой $M'$ (рис. 47):

$$F(x) = G\frac{mM'}{r^2}.$$

Это утверждение можно доказать, например, с помощью теоремы Гаусса для гравитационного поля.

Пусть $x$ – расстояние, которое пролетел камушек, отсчитываемое от точки полюса $P$. На этом расстоянии сила притяжения камушка к Земле

$$F(x) = G\frac{mM'}{(R-x)^2} = G\frac{m}{(R-x)^2}\cdot\rho\frac{4}{3}\pi(R-x)^3 = Gm\rho\frac{4}{3}\pi(R-x) =$$

$$= G\frac{mM}{R^3}(R-x) = mg\frac{R-x}{R},$$

где $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ – средняя плотность Земли; $M$ – масса Земли; $R$ – радиус Земли.

Изменение кинетической энергии камушка равно работе силы тяготения. Сила тяготения $F(x)$ линейно зависит от переменной $x$, поэтому ее работа равна площади трапеции под графиком функции $F(x)$ (рис. 48):

$$\frac{mv^2}{2} = A_F = \frac{1}{2}\left(mg + \frac{3}{4}mg\right)\frac{R}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{7gR}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}v_I = 5{,}3 \text{ км/с}.$$

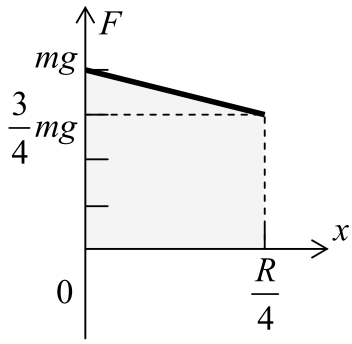


**Рис. 48**

**3.** Обозначим $v$ – скорость комочка массой $m$, тогда его кинетическая энергия $W = \dfrac{mv^2}{2}$.

Пусть $u$ – скорость большого тела массой

$$M = m + 2m + ... + Nm = \frac{N(N+1)}{2}m.$$

При всех столкновениях комочков сохраняется импульс

$$mv = Mu \Rightarrow u = \frac{mv}{M}.$$

Изменение кинетической энергии системы

$$\Delta W = \frac{mv^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 - \frac{m}{M}\right) = W\left(1 - \frac{2}{N(N+1)}\right).$$

Можно считать, что это изменение кинетической энергии полностью переходит во внутреннюю энергию системы, выделяющейся в виде теплоты:

$$\Delta W = Q = cM\left(t - 0\ ^\circ\text{C}\right) \Rightarrow t = \frac{W}{cM}\left(1 - \frac{2}{N(N+1)}\right) =$$

$$= \frac{2W}{cm} \cdot \frac{N^2 + N - 2}{N^2(N+1)^2} = \frac{2W(N-1)(N+2)}{cmN^2(N+1)^2}.$$

**4.** Условие плавания воздушного шара вблизи поверхности Земли:

$$(m+4m+m_{\text{г.в}})g=\rho gV,$$

где $m_{\text{г.в}}$ – масса горячего воздуха в шаре; $V$ – объем шара; $\rho$ – плотность воздуха снаружи шара. Массу горячего воздуха в шаре и плотность воздуха снаружи шара можно найти с помощью уравнения состояния идеального газа (воздух внутри и снаружи шара можно считать идеальным газом):

$$m_{\text{г.в}}=\frac{p_0V\mu}{RT};\ \ \rho=\frac{p_0\mu}{RT_0},$$

где $p_0$ – давление воздуха вблизи поверхности Земли. Тогда

$$5m+\frac{p_0V\mu}{RT}=\frac{p_0V\mu}{RT_0}\ \Rightarrow\ p_0=\frac{5mRT_0T}{V\mu(T-T_0)}.$$

Аналогично можно найти давление $p$ на высоте, куда поднялся шар с грузом $2m$:

$$3m+\frac{pV\mu}{RT}=\frac{pV\mu}{RT_1}\ \Rightarrow\ p=\frac{3mRT_1T}{V\mu(T-T_1)}.$$

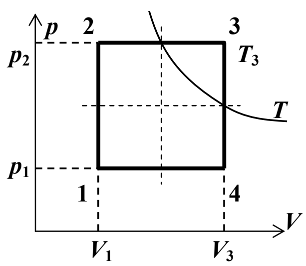


**Рис. 49**

Тогда

$$\frac{p_0}{p}=\frac{5T_0(T-T_1)}{3T_0(T-T_0)}=4\ \Rightarrow\ H=10\ \text{км}.$$

**5.** а) Запишем уравнения состояния газа в точках, находящихся посередине изобары 2–3 и изохоры 3–4 (рис. 49):

$$p_2\frac{(V_1+V_3)}{2}=\frac{(p_1+p_2)}{2}V_3=\nu RT, \qquad (*)$$

откуда следует

$$p_2 V_1 = p_1 V_3 \;\Rightarrow\; T_2 = T_4 .$$

Это доказывает, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

б) Из уравнений (*) получим связь абсолютной температуры газа в состояниях 2 и 4 с известными температурами $T$ и $T_3$:

$$\nu R T_2 + \nu R T_3 = 2\nu R T\,,\;\; T_2 = T_4 = 2T - T_3 .$$

Температуру $T_1$ можно найти, записав уравнения изохорных процессов 1–2 и 3–4:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \Rightarrow T_1 = \frac{T_2^2}{T_3} = \frac{(2T - T_3)^2}{T_3}.$$

Работа за цикл 1–2–3–4–1 равна площади цикла:

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1) = \nu R(T_3 - T_4 - T_2 + T_1) = \nu R\frac{4(T_3 - T)^2}{T_3}.$$

Газ получает теплоту на участках 1–2 и 2–3:

$$Q_{\text{пол}} = Q_{12} + Q_{23},$$

где

$$Q_{12} = c_{\mu V}\nu(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}\nu R\left(2T - T_3 - \frac{(2T - T_3)^2}{T_3}\right) =$$

$$= \frac{3\nu R}{T_3}(2T - T_3)(T_3 - T);$$

$$Q_{23} = c_{\mu p}\nu(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R\left(T_3 - 2T - T_3\right) = 5\nu R(T_3 - T).$$

Тогда

$$Q_{\text{пол}} = \frac{2\nu R}{T_3}(T_3 - T)(3T + T_3) .$$

КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{2(T_3 - T)}{3T + T_3}.$$

### *Вариант 2*

**1.** $u = \dfrac{v\sin(\beta - \alpha)}{2\sin\beta} = \dfrac{v}{2\sqrt{2}}.$

**2.** $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} v_I = 6{,}9$ км/с.

**3.** $t = \dfrac{2W(N-1)}{cmN(N+1)^2}$ .

**4.** $H = 20$ км.

**5.** $\eta = \dfrac{2(T - T_1)}{5T - T_1}$ .

## 2011 год

### *Вариант 1*

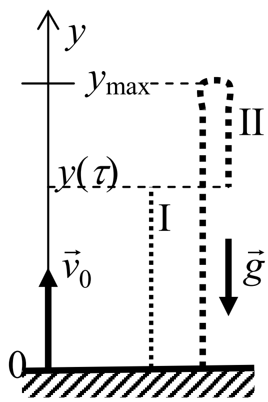

Рис. 50

**1.** а) Обозначим $v_0$ начальную скорость камушка, $\tau$ = 1 с. Запишем уравнения движения камушка (рис. 50):

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}; \quad v_y(t) = v_0 - gt.$$

Следует рассмотреть две возможные траектории движения камушка (на рис. 50 это траектории I и II).

*Траектория* I. Камушек за первую секунду не успевает достичь максимальной высоты. В этом случае

$$v_y(\tau) > 0,$$

тогда

$$S = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2} \Rightarrow v_0 = \frac{S}{\tau} + \frac{g\tau}{2} = \frac{2}{1} + \frac{10\cdot 1}{2} = 7 \text{ м/с}.$$

Подставим полученное значение начальной скорости в формулу для проекции скорости:

$$v_y(\tau) = v_0 - g\tau = \frac{S}{\tau} - \frac{g\tau}{2} = 7 - 10\cdot 1 = -3 \text{ м/с} < 0.$$

Отрицательное значение $v_y(\tau = 1 \text{ с})$ означает, что камушек поворачивает раньше, чем пройдет первая секунда. Получили противоречие. Вообще траектория I возможна, если

$$v_y(\tau) = \frac{S}{\tau} - \frac{g\tau}{2} > 0 \;\Rightarrow\; S > \frac{g\tau^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

*Траектория* II. Камушек поворачивает в течение первой секунды. Обозначим $t_1$ – время, через которое камушек достигнет максимальной высоты $y_{\max}$. Тогда

$$v_y(t_1) = 0 \;\Rightarrow\; v_0 - gt_1 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{v_0}{g} < \tau .$$

Путь, пройденный камушком, при этом складывается из двух отрезков:

$$S = y_{\max} + \big(y_{\max} - y(\tau)\big) = 2y_{\max} - y(\tau) .$$

Подставив формулу для максимальной высоты

$$y_{\max} = y(t_1) = \frac{v_0^2}{2g}$$

и формулу для перемещения

$$y(\tau) = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

получим квадратное уравнение для нахождения начальной скорости камушка $v_0$:

$$\frac{v_0^2}{g} - \tau \cdot v_0 + \left( \frac{g\tau^2}{2} - S \right) = 0. \qquad (*)$$

Дискриминант квадратного уравнения

$$D = \frac{4S}{g} - \tau^2 = \frac{4 \cdot 2}{10} - 1 = -0,2 < 0,$$

т. е. квадратное уравнение не имеет решений, что означает следующее: не существует начальной скорости, с которой камушек за первую секунду после броска прошел бы путь, равный $S = 2$ м.

б) Полученное выше квадратное уравнение (*) имеет решение, если

$$D = \frac{4S}{g} - \tau^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; S \ge \frac{g\tau^2}{4} \;\Rightarrow\; S_{\min} = \frac{g\tau^2}{4} = \frac{10 \cdot 1}{4} = 2,5 \text{ м}.$$

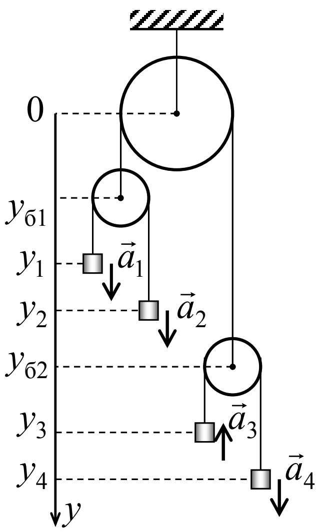


**Рис. 51**

**2.** а) Решим задачу двумя способами.

Первый способ. Используем постоянство длины нитей. Будем считать блоки тонкими (хотя учет их размеров не очень усложняет решение задачи). Обозначим $y_{б1}$, $y_{б2}$, $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ координаты подвижных блоков и грузов в некоторый момент времени $t$ (рис. 51). Запишем условия постоянства длины нитей:

$$L_1 = y_{б1} + y_{б2} = \text{const};$$
$$L_2 = (y_1 - y_{б1}) + (y_2 - y_{б1}) =$$
$$= y_1 + y_2 - 2y_{б1} = \text{const};$$
$$L_3 = (y_3 - y_{б2}) + (y_4 - y_{б2}) =$$
$$= y_3 + y_4 - 2y_{б2} = \text{const}.$$

Эти условия справедливы для любых моментов времени, в частности, и для некоторых моментов времени $t_1$ и $t_2$. Тогда для перемещений блоков

$$\Delta y_{б1} = y_{б1}(t_1) - y_{б1}(t_2); \quad \Delta y_{б2} = y_{б2}(t_1) - y_{б2}(t_2)$$

и для перемещений грузов $\Delta y_1$, $\Delta y_2$, $\Delta y_3$, $\Delta y_4$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \Delta y_{б1} + \Delta y_{б2} = 0; \\ \Delta y_1 + \Delta y_2 - 2\Delta y_{б1} = 0; \\ \Delta y_3 + \Delta y_4 - 2\Delta y_{б2} = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4 = 0.$$

Учитывая, что

$$\Delta y_1 = \frac{a_1 t^2}{2},\ \Delta y_2 = \frac{a_2 t^2}{2},\ \Delta y_3 = -\frac{a_3 t^2}{2},\ \Delta y_4 = \frac{a_4 t^2}{2}$$

(см. рис. 51), находим связь ускорений: $a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_4 = a_3 - a_1 - a_2 = 0$.

Второй способ. Используем закон сложения ускорений при относительном движении. Пусть блок 1 (рис. 52) движется с ускорением $a$ вниз, а блок 2 – с таким же по модулю ускорением вверх. Относительные ускорения грузов 1 и 2 в системе отсчета, связанной с движущимся блоком 1, равны по модулю:

$$|\vec{a}_1'| = |\vec{a}_2'| = a'.$$

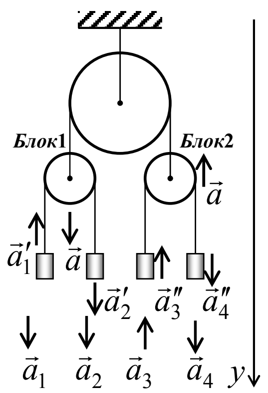

**Рис. 52**

Тогда ускорения грузов 1 и 2 соответственно равны

$$a_1 = -a' + a,\ a_2 = a' + a \ \Rightarrow a_1 + a_2 = 2a. \qquad (*)$$

Аналогичные уравнения получим для ускорений грузов 3 и 4. Обозначим $\vec{a}_3''$ и $\vec{a}_4''$ относительные ускорения грузов 3 и 4 в системе отсчета, связанной с блоком 2:

$$\left|\vec{a}_3''\right| = \left|\vec{a}_4''\right| = a''.$$

Тогда

$$a_3 = a'' + a, \ a_4 = a'' - a \ \Rightarrow \ -a_3 + a_4 = -2a. \qquad (**)$$

Складывая уравнения (*) и (**), получаем

$$a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \ \Rightarrow \ a_4 = 0.$$

б) Силы натяжения всех нитей, на которых висят грузы, равны. Обозначим $T$ эти силы натяжения. Поскольку $a_4 = 0$, то $T = m_4 g$. Пусть $m_4 = 1$ кг. Выразим массы остальных грузов через массу $m_4$. Например, для груза 3 уравнение динамики имеет вид

$$m_3 g - T = -m_3 a_3 \ \Rightarrow \ m_3 = \frac{T}{g + a_3} = \frac{m_4 g}{g + a_3} = \frac{10}{13} m_4 = \frac{10}{13} \text{ кг}.$$

Аналогично получим значения масс грузов 1 и 2:

$$m_1 = \frac{m_4 g}{g - a_1} = \frac{10}{9} m_4 = \frac{10}{9} \text{ кг}; \ m_2 = \frac{m_4 g}{g - a_2} = \frac{5}{4} m_4 = \frac{5}{4} \text{ кг}.$$

Возможны и другие значения масс грузов, но, согласно условию, требуется привести хотя бы один пример.

**3.** а) Шарик движется по мертвой петле до некоторой точки, в которой он отрывается от петли, и затем движется свободно по параболе, как тело, брошенное под углом $\alpha$ к горизонту (рис. 53). Высота $h$, на которой шарик отрывается от петли, угол отрыва $\alpha$ и скорость $v$ шарика в момент отрыва находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} mg \cdot 2R = mgh + \dfrac{mv^2}{2}; \\ N + mg\cos\alpha = \dfrac{mv^2}{R}; \\ N = 0 \text{ (условие отрыва)}; \\ h = R + R\cos\alpha; \end{cases} \qquad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}; \ h = \frac{5}{3}R; \ v = \sqrt{\frac{2}{3} gR}.$$

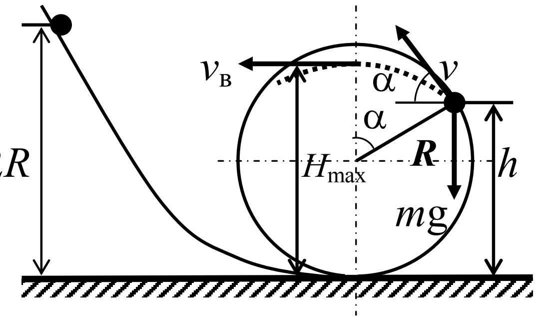


**Рис. 53**

б) Максимальную высоту $H_{max}$ можно найти с помощью формул кинематики, но проще использовать закон сохранения энергии:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} = mgH_{max} + \frac{mv_в^2}{2},$$

где $v_в = v\cos\alpha$ – скорость шарика в верхней точке траектории. Тогда

$$H_{max} = h + \frac{v^2}{2g}(1 - \cos^2\alpha) = \frac{50}{27}R.$$

**4.** Максимальная выталкивающая сила будет, когда жидкость доходит до верхнего края пробки (рис. 54). Задачу будем решать,

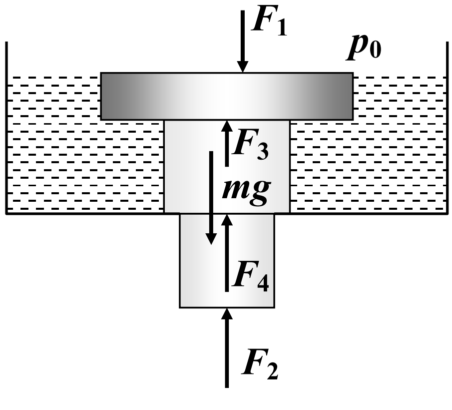


**Рис. 54**

учитывая, что сила Архимеда равна результирующей сил давления атмосферы $F_1$ и жидкости $F_2$, $F_3$, $F_4$ на различные части пробки. Поскольку силы давления жидкости, действующие в горизонтальном направлении, уравновешены, условие всплытия пробки имеет следующий вид:

$$F_1 - F_2 - F_3 - F_4 + mg = 0,$$

где $F_1 = p_0 \cdot \pi a^2$;

$$F_2 = p_0 \cdot \pi(0,4a)^2 = p_0 \cdot 0,16\pi a^2;$$

$$F_3 = \left(p_0 + \rho g\frac{h}{2}\right)\cdot\left(\pi a^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = \left(p_0 + \rho g\frac{h}{2}\right)\cdot 0,75\pi a^2;$$

$$F_4 = \left(p_0 + \rho g\cdot\frac{3}{2}h\right)\cdot\left(\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi(0,4a)^2\right) = \left(p_0 + \rho g\cdot\frac{3}{2}h\right)\cdot 0,09\pi a^2;$$

$$m = \rho_{\text{п}}\left(\pi a^2\frac{h}{2} + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 h + \pi(0,4a)^2 h\right) = \rho_{\text{п}}\cdot 0,91\pi a^2 h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{п}} = \rho\cdot\frac{0,51}{0,91} = \frac{51}{91}\rho.$$

*Замечание*. Для решения задачи можно использовать формулу для силы Архимеда $F_{\text{A}} = \rho g V$, только в нее необходимо подставить правильное значение объема вытесненной жидкости:

$$V = \pi a^2\frac{h}{2} + \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 h - \pi(0,4a)^2\cdot\frac{3}{2}h = 0,51\pi a^2 h.$$

**5.** а) Для процесса 1–2 (рис. 55):

$$U = \frac{3}{2}pV \sim p^2 \Rightarrow p \sim V,$$

значит, в координатах $pV$ график этого процесса – прямая, проходящая через начало координат. Для процесса 2–3:

$$U = \frac{3}{2} pV \sim p \Rightarrow V = \text{const}.$$

Для процесса 3–1:

$$p = \text{const}.$$

Теперь можно построить график цикла 1–2–3–1 в координатах $pV$ (рис. 56).

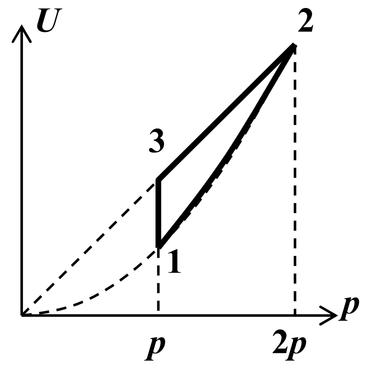


**Рис. 55**

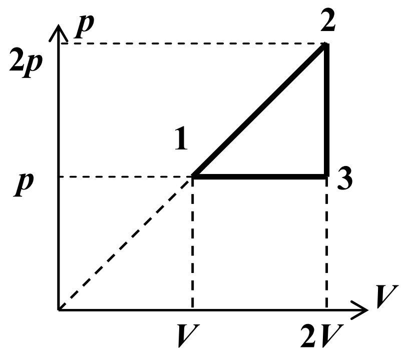


**Рис. 56**

б) КПД цикла рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_{\text{пол}}}.$$

Работа за цикл

$$A_{\text{цикла}} = \frac{1}{2} pV.$$

Газ получает теплоту только в процессе 1–2, поэтому полученное количество теплоты

$$Q_{\text{пол}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{3}{2}(2p \cdot 2V - pV) + \frac{1}{2}(p + 2p)(2V - V) =$$

$$= 6pV \Rightarrow \eta = \frac{1}{12} \simeq 8{,}3\ \%.$$

### *Вариант 2*

**1.** а) Не может. б) $S_{\min} = \dfrac{g\tau^2}{4} = 10$ м.

**2.** а) $a_4 = 0$. б) Например, $m_1 = 2$ кг, $m_2 = \dfrac{5}{6}$ кг, $m_3 = \dfrac{10}{13}$ кг, $m_4 = 1$ кг.

**3.** а) Груз движется по окружности до точки, находящейся на расстоянии $h = L/6$ от планки. В этой точке сила натяжения нити, на которой висит груз, становится равной нулю, и груз начинает двигаться свободно по параболе, как тело, брошенное под углом к горизонту. б) $H_{\min} = \dfrac{2}{27}L$.

**4.** $\rho_п = \dfrac{51}{91}\rho \approx 0{,}56\rho$.

**5.** а) График процесса изображен на рис. 57. б) $\eta = \dfrac{1}{13} = 7{,}7$ %.

### 2012 год

**1.** При $x = 2$ мм $a = -0{,}75$ мм/с$^2$, а при $x = 8$ мм $a = 0$.

**2.** $H = \dfrac{\mu^2}{k}$.

**3.** $a = \dfrac{g(H_0 + H - h)}{L} = g$.

**4.** Процесс 2–3 – изобарный; $A_{123} = 40$ Дж. График процесса 1–2–3 приведен на рис. 58.

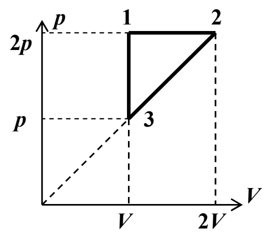


**Рис. 57**

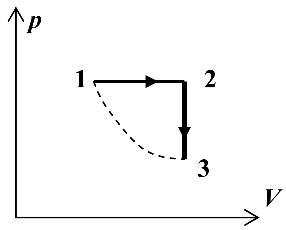


**Рис. 58**

**5.** Поршень сместился на $0{,}3L$. Конечная температура $1{,}2T$.

## 2. Олимпиадные задачи для самостоятельного решения (2005–2008 гг.)

### Кинематика

**1.** $t = \dfrac{L_2^2 - L_1^2}{2L_1 v_1} = 75$ с. *Указание*. Постройте график функции $v^{-1}(l)$, тогда время равно площади трапеции под графиком функции в интервале ($L_1$, $L_2$).

**2.** $h = \dfrac{S(1-\eta)}{1+\eta-2\eta^{n+1}} = 100$ м. Не может. *Указание*. Докажите, что длины отрезков пути, пройденные шариком после каждого удара, образуют геометрическую прогрессию.

**3.** $a_{M_1} = \dfrac{v^2}{2R} = 0{,}5$ м/с$^2$, $a_{M_2} = \dfrac{v^2}{4R} = 0{,}25$ м/с$^2$. *Указание*. Найдите радиусы кривизны циклоиды в точках $M_1$ *и* $M_2$. Например, в точке $M_1$:

$$a_n = \frac{\left(v\sqrt{2}\right)^2}{R_1} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R_1 = 2R\,.$$

Тогда

$$a_{M_1} = \frac{v^2}{R_1} = \frac{v^2}{2R}\,.$$

**4.** Ускорение в начальной точке траектории $a_{\text{нач}} = g/2$, в верхней точке $a_{\text{верхн}} = 4g$.

**5.** Вектор скорости $\vec{v}_C$ точки $C$ направлен вдоль стороны $BC$; $v_B = 2v$, $v_C = v$. *Указание*. Постройте мгновенный центр вращения $O$. Для этого проведите прямые $AO \perp \vec{v}_A$ и $BO \perp \vec{v}_B$ и найдите их точку пересечения. Следует учесть, что скорости точек $A$, $B$ и $C$ равны соответственно $v_A = v = \omega \cdot AO$, $v_B = \omega \cdot OB$ и $v_C = \omega \cdot OC$, где ω – угловая скорость вращения этих точек вокруг мгновенного центра вращения.

## Динамика

**6.** $D = \frac{gt^2}{2}$.

**7.** $\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{4}{7}mg$. Указание. Очевидно, что в случае неподвижных одинаковых грузов массой $m$ динамометр показывает вес $P_1 = 4mg$. Докажите, что если на один из грузов положить дополнительный груз массой $m$, то эта пара грузов общей массой $2m$ будет двигаться с ускорением в 3 раза большим, чем ускорения остальных грузов массой $m$. Записав уравнения динамики для всех грузов, можно найти силу натяжения $T$ нитей, на которых они висят, и показания динамометра: $P_2 = 4T = \frac{32}{7}mg$.

**8.** Ускорения верхних бусинок равны $a_1 = a_2 = \frac{g\sqrt{3}}{7}$, а ускорение нижней бусинки – $a_3 = \frac{g}{7}$. *Указание*. Докажите, что ускорения бусинок связаны формулой $a_1 = a_2 = a_3\sqrt{3}$. Для этого запишите условие нерастяжимости нити, заключающееся в том, что проекции скоростей бусинок на ось, направленную вдоль нити, одинаковы в любой момент времени. Не забудьте написать уравнения динамики для каждой бусинки.

**9.** $F = 4\mu mg$. *Указание*. Докажите, что конструкция не разрушится, пока она движется как единое целое с ускорением $a = \frac{F}{4m}$, при этом между верхними и нижними кубиками действуют силы трения покоя. Для разрушения конструкции нужно, чтобы эта сила трения приобрела максимальное значение, равное $\mu mg$.

**10.** $F = \frac{4}{3}\mu mg$.

**11.** $F = mg\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Указание*. Докажите, что тангенциальные ускорения шариков одинаковы и запишите уравнения динамики для каждого шарика вдоль осей, касательных к чаше.

**12.** Сила давления левого шара $N_1 = \frac{11\sqrt{3}}{9}mg$; сила давления правого шара $N_2 = \frac{13\sqrt{3}}{18}mg$.

**13.** Продолжительность земного года уменьшилась бы в $\sqrt{2}$ раз. *Указание*. Если бы масса Земли сравнялась с массой Солнца, то Солнце уже нельзя было бы считать неподвижным. В этом случае следует учитывать, что Солнце и Земля представляют собой двойную систему и вращаются вокруг общего центра масс.

**14.** Ускорения, сообщаемые Солнцем Земле и Луне, примерно одинаковы. Поэтому Земля и Луна образуют единую систему двух тел, движущихся вокруг общего центра масс, а центр масс системы обращается вокруг Солнца.

## Импульс. Энергия

**15.** Быстрее пройдет тележка, на которой дворник спит. *Указание*. Используйте закон сохранения импульса и найдите скорости тележек после того, как на них упадет $n$ одинаковых порций снега. Скорость тележки, на которой дворник спит, получится равной $u_n = \frac{Mv}{(M + n \cdot \Delta m)}$, а скорость тележки, на которой дворник все время работает, – равной $v_n = \left(\frac{M}{M + \Delta m}\right)^n v$, где $M$ – масса тележки с дворником, $\Delta m$ – масса порции снега, падающего на тележку за малое время $\Delta t$; $v$ – начальная скорость тележек. Затем докажите, что $u_n > v_n$.

**16.** $u = \left(\frac{M}{M + m}\right)^{n+1} v_0$.

**17.** $\frac{m_2}{m_1} = 1$, $v = \sqrt{g(3H - 2R)}$. *Указание*. Докажите, что шарик, который отрывается на высоте $h = \frac{2}{3}R$, до столкновения двигался, а сразу после столкновения остановился.

**18.** $H = \dfrac{33}{48}R$.

**19.** Угол $\text{AOC} = 120^\circ$. *Указание*. Докажите с помощью законов сохранения импульса и энергии, что после первого столкновения модули скоростей шариков не изменились, изменились только их направления.

**20.** Сила давления нижнего шарика на вертикальную плоскость равна $N_1 = mg\cos\alpha(3\sin\alpha - 2)$, если $\sin\alpha < \dfrac{2}{3}$; при $\sin\alpha \geq \dfrac{2}{3}$ нижний шарик начнет двигаться от вертикальной плоскости, поэтому в этом случае он не давит на нее и $N_1 = 0$. Сила давления на горизонтальную плоскость $N_2 = mg(3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1)\ \ \forall\alpha$. *Указание*. Запишите уравнения динамики для нижнего и верхнего шариков, считая нижний шарик неподвижным, а верхний – движущимся по окружности радиусом $L$ с центростремительным ускорением $a = \dfrac{v^2}{L}$. Скорость верхнего шарика $v$ при этом может быть найдена из закона сохранения энергии.

## Статика. Гидростатика

**21.** $m = \dfrac{\sqrt{3\left(T_A^2 - T_B^2\right)}}{g} = 1{,}5$ кг. *Указание*. Запишите условия равновесия сил для частей $AC$ и $BC$ каната.

**22.** $T_C = \sqrt{\dfrac{9T_A^2 - T_B^2}{8}} = 2$ Н.

**23.** $h = \dfrac{\pi\rho R\left(\dfrac{2}{3}R^2 - r^2\right) + m}{\pi\rho\left(R^2 - r^2\right)} \simeq \dfrac{2}{3}R + \dfrac{m}{\pi\rho R^2}$, с учетом условия $r \ll R$.

**24.** $h = \dfrac{1}{3}H + \dfrac{m}{\pi\rho R^2}$.

**25.** $\alpha = 30^\circ$. *Указание*. Запишите условие равновесия (правило моментов) стержня в жидкости.

## Молекулярная физика и термодинамика

**26.** $T = \dfrac{\mu GMh}{Rr^2}$. *Указание*. Поскольку плотность атмосферы постоянна и ее толщина $h \ll r$, то давление атмосферы на поверхность планеты равно $p = \rho gh$, где $g$ – ускорение свободного падения на поверхности планеты. С другой стороны, давление атмосферы можно найти с помощью уравнения состояния идеального газа: $p = \dfrac{\rho}{\mu} RT$.

**27.** $M = \dfrac{4\pi R_B^2 \rho RT}{\mu g_B} \approx 6 \cdot 10^{19}$ кг.

**28.** Сосуд сдвинется влево на $\dfrac{9}{92}L$. *Указание*. Рассчитайте, на какое расстояние сместится центр масс системы после открывания шторки.

**29.** $T_C = \dfrac{\left(n\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)^2}{(n+1)^2}$. *Указание*. Запишите уравнения Менделеева – Клапейрона для состояний $A$, $B$ и C, при этом следует учесть, что состояния $A$, $B$ и $C$ лежат на прямой $p = kV$, где $k$ – угловой коэффициент этой прямой.

## ОГЛАВЛЕНИЕ